$$\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}=\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}=\frac{4}{x^4}\Rightarrow 4-4\sin^2 y\Rightarrow \sin^2 y=\frac{4}{4+x^4}$$

$$d'où\ g'(x)=\frac{-4x}{4+x^4}$$

4°/

a) On a : g est dérivable sur $[0,+\infty[$,

$x\mapsto\sqrt{2x}$ et $x\mapsto\sqrt{\frac{2}{x}}$ sont

dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et somme des fonctions dérivables

b) $\forall x\in]0,+\infty[$,

$$\varphi'(x)=(\sqrt{2x})'.g'(\sqrt{2x})+\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)'.g'\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x}}.\frac{-4\sqrt{2x}}{4+4x^2}-\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}}}.\frac{-4\sqrt{\frac{2}{x}}}{\frac{4}{x^2}+4}=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=0$$

D'où $\forall x\in]0,+\infty[$, $\varphi'(x)=0$; $\varphi(1)=2g(\sqrt{2})$

Cherchons le réel $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$ tel que $g(\sqrt{2})=x$:

$g(\sqrt{2})=$

$$x\Leftrightarrow\sqrt{2}=f(x)\Leftrightarrow\sqrt{2}=\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}\Leftrightarrow\frac{\sin^2 x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\tan x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\ \text{d'où}\ \varphi(1)=\frac{\pi}{2}$$

c) On a : $\forall x\in]0,+\infty[$, $\varphi'(x)=0$ donc φ est une constante

$$\Rightarrow\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \varphi(x)=\varphi(1)=\frac{\pi}{2}.$$